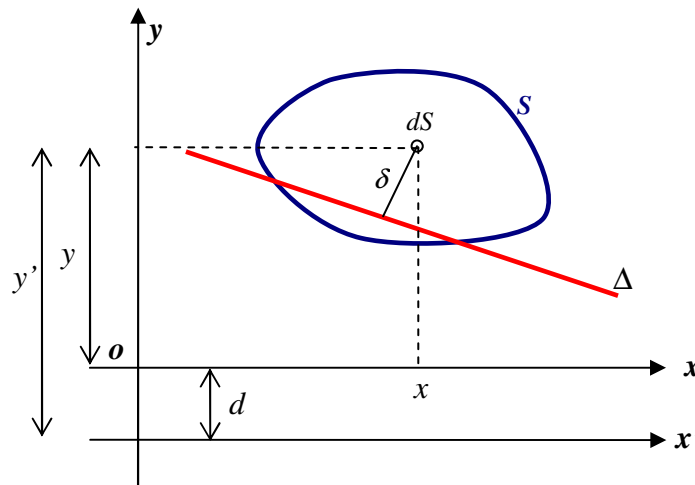


# CARACTERISTIQUES DES SECTIONS PLANES

## MOMENT STATIQUE D'UNE SECTION PLANE

Soient une aire plane  $S$  et une droite  $\Delta$ . Le moment statique de la section  $S$  par rapport à  $\Delta$   $m(S)/\Delta$  est défini par l'intégrale :

$$m(S)/\Delta = \iint_S \delta dS \quad (\text{dorénavant, on note le moment statique par rapport à } \Delta \text{ } m_\Delta).$$



Les moments statiques par rapport aux axes  $x$  et  $y$  s'expriment par :

$$m_x = \iint_S y dS \quad \text{et} \quad m_y = \iint_S x dS$$

### Remarques :

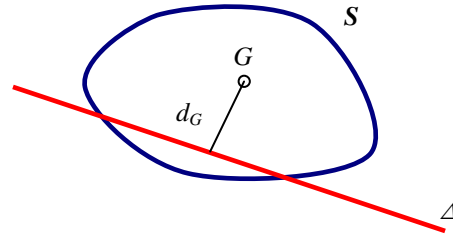
1. Le moment statique est homogène à un volume. Il s'exprime en  $mm^3, cm^3 \dots$  etc .
2. Le moment statique d'une section  $S$  par rapport à un axe quelconque passant par son centre de gravité est nul.
3. Le moment statique d'une section par rapport à un axe de symétrie est nul, puisque cet axe passe par son centre de gravité.
4. Sur la figure ci-dessus, on peut noter que :  $y' = y + d$  . Par conséquent :  $m_{x'} = m_x + S \cdot d$  (cette expression est valable uniquement si les droites  $x$  et  $x'$  sont parallèles). Si l'axe  $x$  passe par le centre de gravités de  $S$ , le moment statique par rapport à  $x'$  est donné par :  $m_{x'} = S \cdot d$  .

## CENTRE DE GRAVITE D'UNE SECTION PLANE

La distance  $d_G$  du centre de gravité d'une section plane  $S$  à une droite  $\Delta$  est définie par la relation suivante :

$$d_G = \frac{m_\Delta}{S}.$$

Cette relation permet aussi de calculer le moment statique d'une section connaissant la position de son centre de gravité.



## MOMENT D'INERTIE, RAYON DE GIRATION D'UNE SECTION PLANE

Le moment d'inertie  $I_\Delta$  de la section  $S$  par rapport à  $\Delta$  est défini par l'intégrale :

$$I_\Delta = \iint_S \delta^2 dS.$$

Le rayon de giration de la section  $S$  par rapport à  $\Delta$  est donné par la relation :

$$r = \sqrt{\frac{I_\Delta}{S}}$$

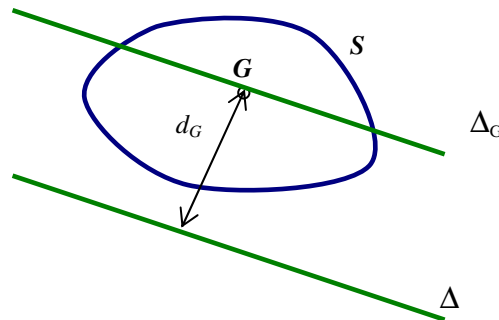
Pour les axes  $x$  et  $y$ , nous avons :

$$I_x = \iint_S y^2 dS, \quad I_y = \iint_S x^2 dS, \quad r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} \quad \text{et} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}.$$

### Théorème d'Huygens :

Le moment d'inertie  $I_\Delta$  d'une section  $S$  par rapport à un axe quelconque  $\Delta$ , situé dans le plan de cette section, est égal au moment d'inertie  $I_{\Delta_G}$  par rapport à l'axe  $\Delta_G$ , parallèle à  $\Delta$  et passant par le centre de gravité  $G$  augmenté du produit de la grandeur de la surface par le carré de distance entre les deux axes  $\Delta$  et  $\Delta_G$  :

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + S \cdot d_G^2$$

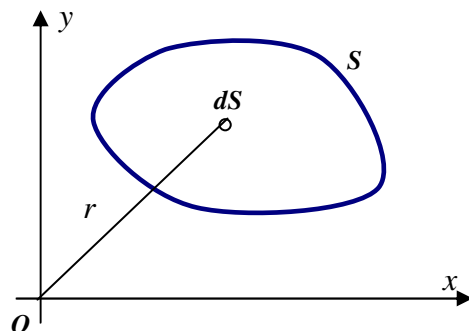


## MOMENT POLAIRE D'UNE SECTION PLANE

Le moment d'inertie polaire d'une section  $S$  par rapport au point  $O$  est donné par l'intégrale :

$$K = \iint_S r^2 dS$$

$$K = \iint_S (x^2 + y^2) dS = I_x + I_y.$$

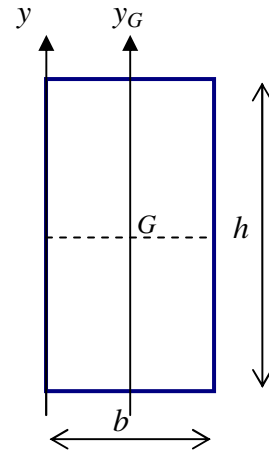


## APPLICATION :

### Énoncé

Soit une section carrée de largeur  $b$  et de hauteur  $h$ . On demande de calculer le moment statique et le moment d'inertie de cette section par rapport aux deux axes suivants :

- Un axe vertical ( $y$ ) passant par le côté gauche de la section.
- Un axe vertical ( $y_G$ ) passant par le centre de gravité de la section.



### Solution

Calcul de  $\underline{m_y}$  et  $\underline{I_y}$  :

$$m_y = \iint_S x dS = \int_0^b \left( \int_0^h x dy \right) dx = \int_0^b (xy)_{y=0}^{y=h} dx$$

$$m_y = \int_0^b x h dx = \left( h \frac{x^2}{2} \right)_{x=0}^{x=b} = \frac{hb^2}{2}$$

De même :  $m_x = \frac{bh^2}{2}$ .

Remarque :

Le choix de la position de l'axe  $x$  n'influe pas sur la valeur du moment statique.

$$I_y = \iint_S x^2 dS = \int_0^b \left( \int_0^h x^2 dy \right) dx = \int_0^b (x^2 y)_{y=0}^{y=h} dx$$

$$I_y = \int_0^b x^2 h dx = \left( h \frac{x^3}{3} \right)_{x=0}^{x=b} = \frac{hb^3}{3}$$

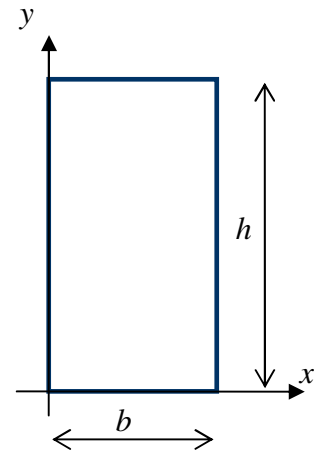
De même :  $I_x = \frac{bh^3}{3}$ .

Trouvons la position du centre de gravité par rapport à l'axe  $y$  :

$$d_y = \frac{m_y}{S} = \frac{hb^2/2}{bh} = \frac{b}{2}$$

Et par rapport à l'axe  $x$  :

$$d_x = \frac{m_x}{S} = \frac{bh^2/2}{bh} = \frac{h}{2}$$



Calcul de  $m_{y_G}$  et  $I_{y_G}$  :

$$m_{y_G} = \iint_S x dS = \int_{-b/2}^{b/2} \left( \int_{-h/2}^{h/2} x dy \right) dx = \int_{-b/2}^{b/2} (xy)_{y=-h/2}^{y=h/2} dx$$

$$m_{y_G} = \int_{-b/2}^{b/2} x h dx = \left( h \frac{x^2}{2} \right)_{x=-b/2}^{x=b/2} = \frac{h}{2} \left( \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) = 0$$

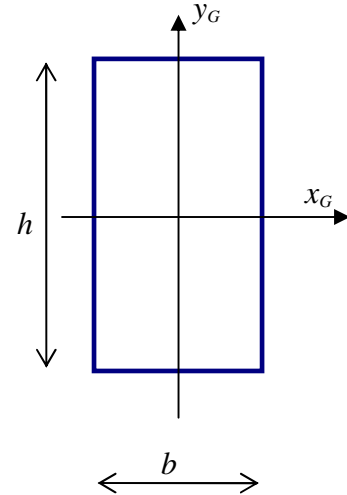
$$I_{y_G} = \iint_S x^2 dS = \int_{-b/2}^{b/2} \left( \int_{-h/2}^{h/2} x^2 dy \right) dx = \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 y)_{y=-h/2}^{y=h/2} dx$$

$$I_{y_G} = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h dx = \left( h \frac{x^3}{3} \right)_{x=-b/2}^{x=b/2} = \frac{h}{3} \left( \frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) = \frac{hb^3}{12}.$$

De même :

$$I_{x_G} = \iint_S y^2 dS = \int_{-h/2}^{h/2} \left( \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dx \right) dy = \int_{-h/2}^{h/2} (y^2 x)_{x=-b/2}^{x=b/2} dy$$

$$I_{x_G} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \left( b \frac{y^3}{3} \right)_{y=-h/2}^{y=h/2} = \frac{b}{3} \left( \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = \frac{bh^3}{12}.$$



## DEVOIR

### Exercice 1

Calculer le moment statique et le moment d'inertie d'une section circulaire de diamètre  $d$ , par rapport aux deux axes vertical ( $y$ ) et horizontal ( $x$ ) passant par son centre de gravité.

Indication :

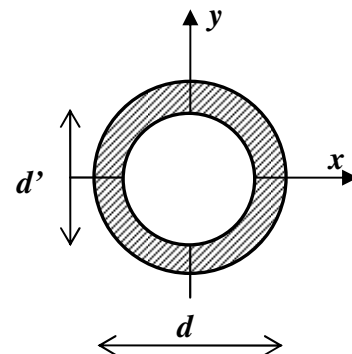
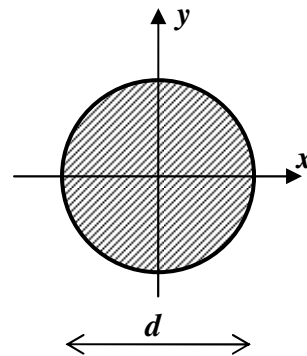
Utiliser les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0 \quad 2\pi] \text{ et } r \in \left[ 0 \quad \frac{d}{2} \right]$$

Avec :  $dS = r \cdot dr \cdot d\theta$ .

### Exercice 2

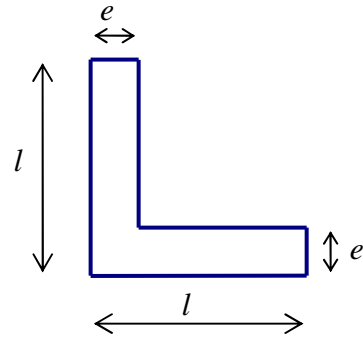
Mêmes questions pour une section circulaire creuse (voir figure ci-contre).



### Exercice 3

Soit la cornière représentée ci-contre. On demande de calculer :

- Son centre de gravité.
- Les moments d'inertie par rapport à  $x_G$  et  $y_G$ .



### Exercice 4

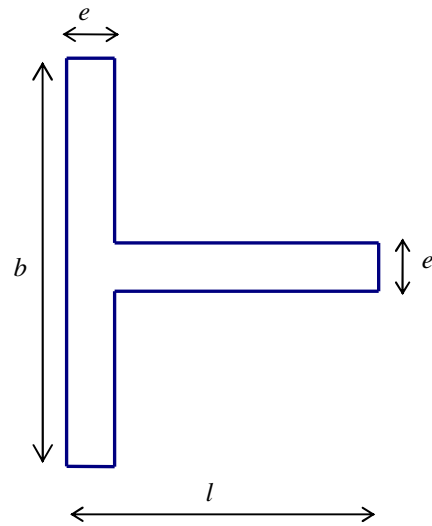
Mêmes questions pour la section ci-contre :

Application numérique :

$$b = 150\text{mm} .$$

$$h = 75\text{mm} .$$

$$e = 10\text{mm} .$$



# LA STATIQUE

Nous nous limitons dans le cadre de ce cours aux solides indéformables en configuration bidimensionnelles.

## LES FORCES

### Définition d'une force

Une force est une action mécanique capable de créer une accélération, ce qui induit un déplacement ou une déformation de l'objet. En résistance des matériaux, une force est une grandeur vectorielle définie par :

- Une direction : droite d'action.
- Un sens : permet d'estimer le mouvement qu'elle va produire (force motrice ou de résistance).
- Un point d'application.
- Une intensité : exprimée en *Newton*.

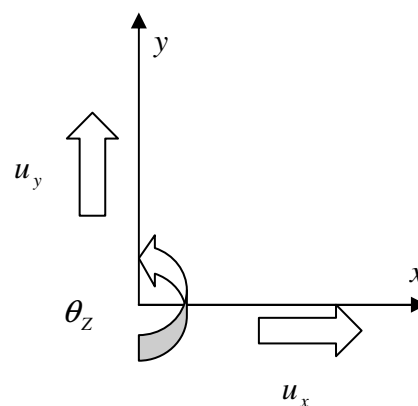
### Actions et réactions

Un corps placé sur un sol horizontal, soumis uniquement à son poids propre, reste en équilibre parce que le sol exerce sur la surface de contact (entre le corps et le sol) une réaction  $\vec{R}$  égale et opposée au poids du corps (voir exemple ci-après).

### Les degrés de liberté de déplacement d'un solide

Les degrés de liberté de déplacement d'un solide représentent les possibilités de déplacements d'un solide lorsqu'il est libre. Dans le cas d'un problème bidimensionnel, le degré de liberté de déplacement d'un solide est égal à 3 :

- Deux translations dans les directions  $x$  ( $u_x$ ) et  $y$  ( $u_y$ ).
- une rotation dans le plan ( $xy$ ) autour de l'axe  $z$  ( $\theta_z$ ).



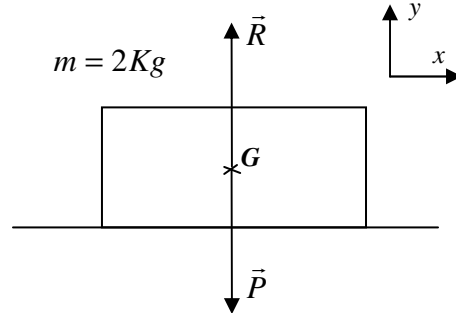
## Exemple :

Un corps, d'une masse de  $2Kg$  est posé sur une surface plane. Son poids  $\vec{P}$  est une force caractérisée par :

- Sa direction : verticale.
- Son sens : vers le bas (pesanteur).
- Son point d'application : centre de gravité du corps.
- Son intensité :  $P = m \cdot g = 20N$ .

La réaction de la surface de pose est aussi schématisée.

Ce corps peut se déplacer selon les deux directions  $x$  et  $y$ , et peut tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan  $xy$ .



## LES MOMENTS DE FORCES

Le moment d'une force exprime l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour d'un point, appelé pivot.

Pour une illustration, nous considérons l'exemple ci-contre.

Si l'intensité de la force  $\vec{F}$  est nulle, le poids de  $\vec{P}$  fait tourner la poulie dans le sens trigonométrique. Cette rotation est provoquée par le moment de  $\vec{P}$  égal à l'intensité de cette force multipliée par le rayon intérieur  $r$  de la poulie (rotation par rapport à l'axe de la poulie).

$$|M(\vec{P})| = P \cdot r.$$

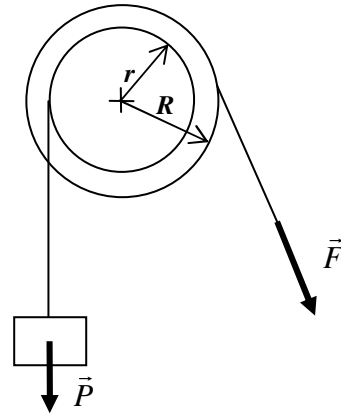
Afin d'éviter cette rotation, il faut équilibrer ce moment par un moment égal en valeur absolue et de sens opposé. La force  $\vec{F}$  fait tourner la poulie dans le sens des aiguilles d'une montre (sens opposé à celui de  $\vec{P}$ ). Son moment est égal à :

$$|M(\vec{F})| = F \cdot R.$$

Afin d'assurer cet équilibre, la force  $\vec{F}$  doit avoir pour intensité :  $F_{eq} = P \frac{r}{R}$ .

Si  $|\vec{F}| > F_{eq}$  : la poulie va tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. A l'opposé, si

$|\vec{F}| < F_{eq}$  la poulie va tourner dans le sens trigonométrique.



## APPLICATIONS EN GENIE CIVIL

### Types de forces

Les forces en génie civil sont diverses. Elles peuvent être :

- Ponctuelles (ou concentrées exprimées en  $Kg, t, N \dots$ ) : essieux d'un.
- Réparties (exprimées en  $Kg/m, t/m, N/m \dots$ ) : effet du vent, poids de la neige, pression appliquée par un liquide...etc.

### Types de liaisons

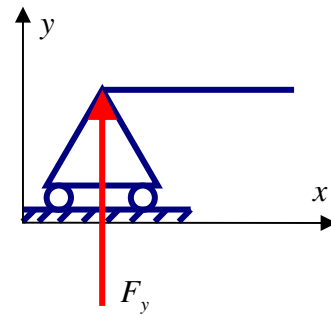
Les liaisons (appuis) sont des dispositifs permettant d'empêcher totalement ou partiellement un ou plusieurs déplacements (translation ou rotation).

#### *Appui simple :*

Un appui simple permet de bloquer la translation dans une seule direction. Pour l'exemple ci-contre :

$$\begin{cases} u_y = 0 \\ u_x \neq 0 \text{ et } \theta_z \neq 0 \end{cases}$$

Afin que la translation dans la direction  $y$  soit bloquée, une force verticale ( $F_y$ ) se développe au niveau de l'appui (réaction d'appui).

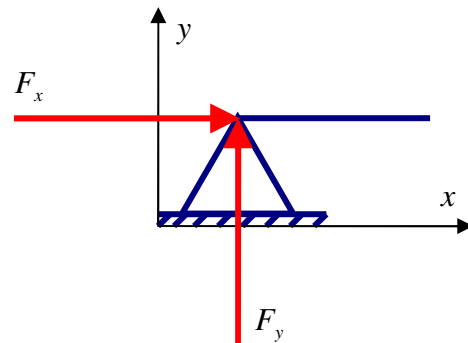


#### *Appui double (articulation)*

Un appui double permet de bloquer les translations dans les deux directions. Pour l'exemple ci-contre :

$$\begin{cases} u_x = u_y = 0 \\ \theta_z \neq 0 \end{cases}$$

Afin que les translations soient bloquées, deux forces ( $F_x$  et  $F_y$ ) se développent au niveau de l'appui.

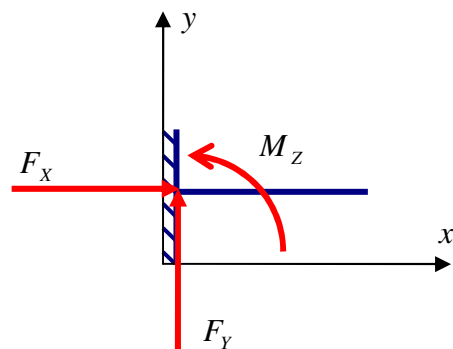


#### *Encastrement*

L'encastrement bloque tous les déplacements (translations et rotation) :

$$u_x = u_y = \theta_z = 0.$$

Par conséquent, les efforts développés au niveau de l'encastrement sont :





$$\begin{cases} F_x \neq 0 \\ F_y \neq 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases}$$

## EQUILIBRE D'UN SOLIDE

L'équilibre d'un système est régi par le principe fondamental de la statique :

Deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un solide indéformable :

- La résultante générale des forces (actions et réactions) appliquées à ce solide est nulle :  $\sum \vec{F} = \vec{0}$ .
- Le moment résultant de toutes les forces appliquées à ce solide, calculé par rapport à un point quelconque est nul :  $\sum \vec{M} = \vec{0}$ .

Dans le cas bidimensionnel, et après projection des efforts, l'équilibre du corps est donné par :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_{/z} = 0 \end{cases}$$

Nous disposons de trois équations ( $k=3$ ), et les inconnues du problème ( $r$ ) sont les réactions d'appui. Nous pouvons constater les trois cas suivants :

- Si  $r < k$  : le système est **instable** ou **hypostatique**.
- Si  $k = r$  : le système est **isostatique** (statiquement déterminé).
- Si  $r > k$  : le système est **hyperstatique**. Le degré d'hyperstaticité du système est égal à  $(r - k)$ .

Ces trois cas sont illustrés dans la figure ci-dessous.

<p>Un appui simple en A (<math>F_{yA}</math>).            Un appui simple en B (<math>F_{yB}</math>).  <math>r=2</math> et <math>k=3</math>, le système est instable. En effet, le déplacement selon <math>x</math> n'est pas bloqué.</p>	<p>Un appui simple en A (<math>F_{yA}</math>).            Un appui double en B (<math>F_{xB}, F_{yB}</math>).  <math>r=k=3</math>, le système est isostatique. Les équations de la statique permettent de déterminer les réactions d'appui.</p>	<p>Un appui simple en A et C (<math>F_{yA}, F_{yC}</math>).            Un appui double en B (<math>F_{xB}, F_{yB}</math>).  <math>r=4</math> et <math>k=3</math>, le système est hyperstatique. Les équations de la statique sont insuffisantes pour déterminer les réactions d'appui.</p>

Remarque :

L'hyperstaticité d'un système ne dépend pas du chargement. Elle dépend uniquement du type de liaisons et de leur nombre.

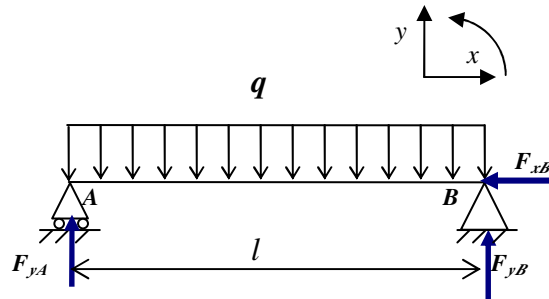
**Application**

Soit une poutre de longueur  $l$ , soumise à une charge uniformément répartie  $q = 3t/m$ .

On demande de calculer les réactions d'appuis.

En A : un appui simple, donc une réaction verticale  $F_{yA}$ .

En B : un appui double (ou articulation), donc une réaction verticale  $F_{yB}$  et une réaction horizontale  $F_{xB}$ .



Le principe fondamental de la statique (PFS) permet d'écrire que :

$$\begin{cases} \sum F_x = F_{xB} = 0 & (1) \\ \sum F_y = F_{yA} + F_{yB} - q \cdot l = 0 & (2) \\ \sum M_{/zA} = F_{yB} \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 & (3) \end{cases}$$

Remarque :

Pour le calcul du moment, il faut choisir un sens de rotation positif. Dans cet exemple, le moment est considéré positif dans le sens trigonométrique. Le choix de l'axe de rotation (pour le calcul des moments) n'a pas d'influence sur la détermination des réactions d'appuis. Dans ce calcul, nous avons choisis de le calculer par rapport à un axe passant par le point A. Ce choix permet d'avoir une expression en  $F_{yB}$  seul, car le moment de  $F_{yA}$  par rapport à A est nul.

L'équation (1) donne directement  $F_{xB} = 0$ .

L'équation (3) permet de calculer  $F_{yB} = \frac{ql}{2}$ .

L'expression de  $F_{yB}$  injectée dans l'équation (2) permet de calculer  $F_{yA} = q \cdot l - F_{yB} = \frac{ql}{2}$ .

Remarque :

Pour des raisons de symétrie, nous avons  $F_{yA} = F_{yB}$ . Cette propriété permet aussi de calculer les réactions d'appui.

**DEVOIR**

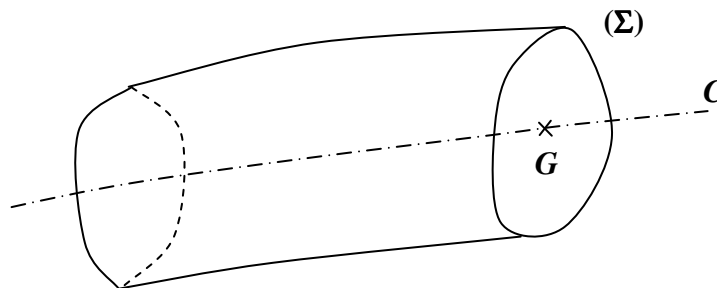
Les exercices du chapitre « La statique » sont communs avec le chapitre « Etude des poutres droites isostatique » (voir Page 22).

# ETUDE DES POUTRES DROITES ISOSTATIQUES

## THEORIE DES POUTRES

### Définition d'une poutre

Une poutre est un solide engendré par une aire plane ( $\Sigma$ ) dont le centre de gravité  $G$  décrit une courbe  $C$  et qui se déplace en restant normale à cette courbe.



On appelle ( $\Sigma$ ) la section droite ou la section transversale de la poutre. Lorsque la courbe  $C$  est plane, la poutre est dite plane. Si  $C$  est une droite, nous avons une poutre droite.

### Hypothèses fondamentales de la théorie des poutres

#### *Hypothèse de Saint Venant*

Enoncé :

« Les contraintes produites par un système de forces dans une section  $\Sigma$  éloignées du point d'application de ces forces ne dépendent que de la résultante générale et du moment résultant du système  $S_G$  des forces appliquées à gauche de  $\Sigma$  ».

#### *Hypothèse de Navier-Bernoulli*

Enoncé :

« Les sections droites  $\Sigma$  restent planes dans la déformation de la poutre ».

## Loi de Hooke

Énoncé :

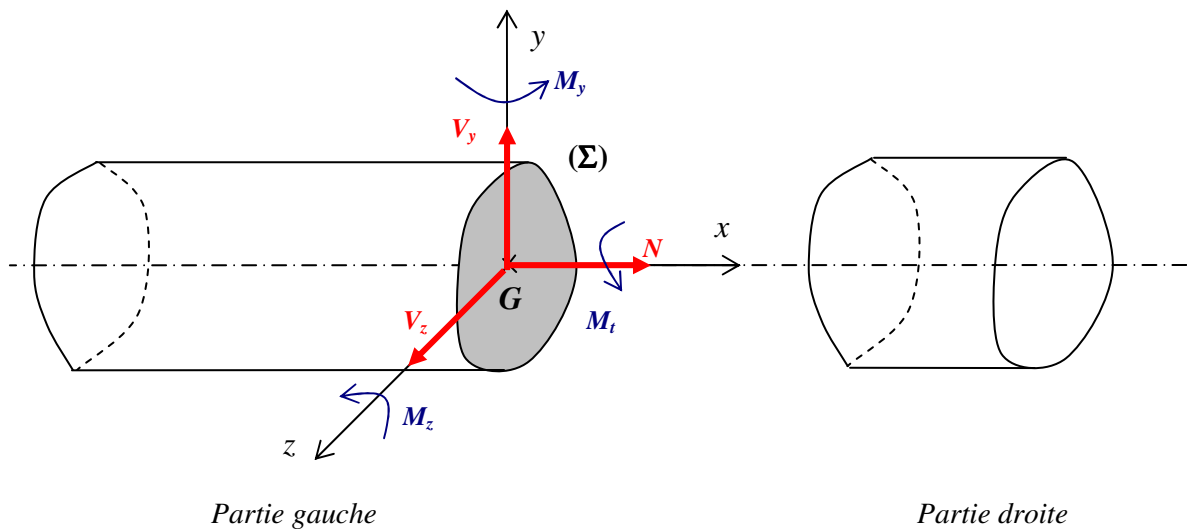
« Les contraintes sont proportionnelles aux déformations ».

Pour la définition des contraintes et des déformations voir page 13.

Le coefficient de proportionnalité entre la contrainte et la déformation est appelé module d'Young ou module élastique  $E$ .

## CONTRAINTES GENERALISEES ET SOLLICITATIONS

### Sollicitations



Soit une poutre en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures (forces ponctuelles, forces réparties, moments ...etc). Effectuons une coupe afin d'isoler la partie gauche de la partie droite. Afin que la partie gauche reste en équilibre, il doit exister un torseur d'action de continuité appliqué par la partie droite sur la partie gauche (principe fondamental de la statique). Ce torseur s'exprime dans le repère  $(G, x, y, z)$  par :

- 1) Une résultante générale :  $\vec{R} = N \cdot \vec{x} + V_y \cdot \vec{y} + V_z \cdot \vec{z}$ .

La projection de  $\vec{R}$  selon l'axe  $\vec{x}$  est l'effort normal  $N$ , et selon les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  est l'effort tranchant selon la direction considérée.

- 2) Un moment résultant :  $\vec{M}(G) = M_t \cdot \vec{x} + M_y \cdot \vec{y} + M_z \cdot \vec{z}$ .

$M_y$  et  $M_z$  sont les moments de flexion et  $M_t$  est le moment de torsion.

L'effort normal, l'effort tranchant, le moment de torsion et le moment de flexion sont appelés **sollicitations**.

## Contraintes généralisées

Soit un point  $P$  situé sur la surface  $\Sigma$  (voir figure ci-dessous). Ce point est défini par les coordonnées  $(x, y, z)$  et par une surface élémentaire  $dS$  (infinitésimale). On admet qu'en chaque point de la surface  $dS$ , la partie droite exerce une force de cohésion proportionnelle à la surface  $dS$  :

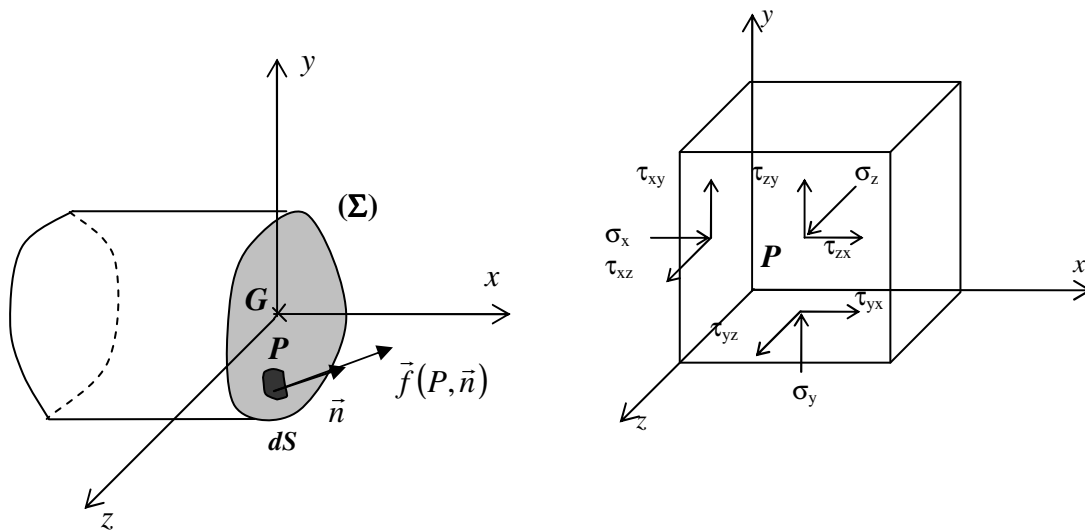
$$f\vec{F} = \vec{f} \cdot dS$$

$\vec{f}$  est le vecteur contrainte en  $P$  selon la direction  $\vec{n}$ . Si l'on considère successivement les trois directions orthogonales  $x, y$  et  $z$ , on peut définir le tenseur des contraintes au point  $P$  par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Si on s'intéresse à la surface ayant pour normale le vecteur unitaire dirigé selon  $x$ , les contraintes appliquées à cette surface sont :

- Une contrainte normale  $\sigma_x$  (dirigée selon  $x$ ).
- Une contrainte tangentielle  $\tau_{xy}$  dirigée selon  $y$ .
- Une contrainte tangentielle  $\tau_{xz}$  dirigée selon  $z$ .



### Remarques :

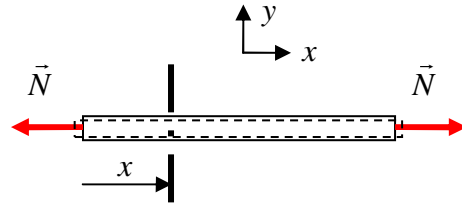
- La contrainte dépend du système de forces extérieures appliqué et de la section considérée (aire et orientation de la normale).
- Expérimentalement, et pour chaque type de matériau, une contrainte limite admissible est définie. Au-delà de cette contrainte, l'élément considéré subit une détérioration de ses caractéristiques mécaniques. Le calcul de la « Résistance des matériaux » est de vérifier que les contraintes engendrées par les efforts extérieurs ne dépassent pas la contrainte limite admissible du matériau.

Exemple : barre soumise à un effort normal de traction (tirant)

Soit un tirant d'une section  $S$  soumis à un effort de traction  $\vec{N}$ .

Si l'on effectue une coupure à une distance  $x$  de l'extrémité gauche du tirant, le principe fondamental de la statique permet de déduire que toutes les sections (indépendamment de la distance  $x$ ) sont sollicitées en traction. La contrainte appliquée à toutes ces sections est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{N}{S} \text{ (La contrainte est homogène à une pression).}$$



Sous l'effet de la force appliquée (contrainte), le matériau subit un allongement  $\Delta l$ . En supposant que la longueur initiale du tirant est  $l_0$ , sa longueur après déformation est donc :  $l_0 + \Delta l$ . La déformation longitudinale dans la direction  $x$  est définie par :

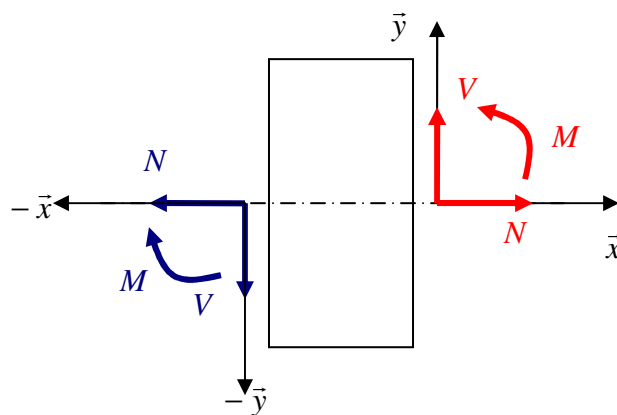
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Selon la loi de *Hooke*, la relation entre la contrainte appliquée et déformation engendrée est la suivante :  $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ .

$E$  est le module d'*Young* ou le module élastique.

## CONVENTION DE SIGNE

Nous considérons les sollicitations positives comme illustré sur la figure ci-dessous.

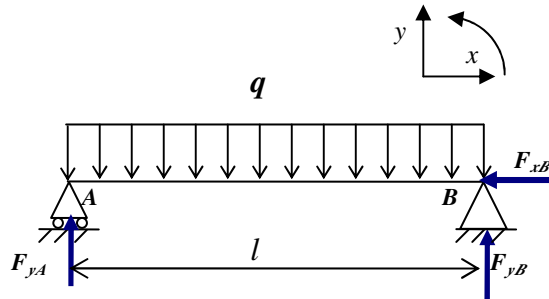


## ÉLABORATION DES DIAGRAMMES DE VARIATION DE $M$ , $V$ ET $N$

Nous présentons à travers l'exemple illustré ci-après les étapes à suivre pour établir les diagrammes de variation de  $M$ ,  $V$  et  $N$ .

Soit une poutre de longueur  $l = 6m$ , soumise à une charge uniformément répartie  $q = 4t/m$ .

On demande de tracer les diagrammes du moment fléchissant  $M$ , de l'effort tranchant  $V$  et de l'effort normal  $N$ .



Les appuis :

En  $A$  : un appui simple, donc une réaction verticale  $F_{yA}$ .

En  $B$  : un appui double (ou articulation), donc une réaction verticale  $F_{yB}$  et une réaction horizontale  $F_{xB}$ .

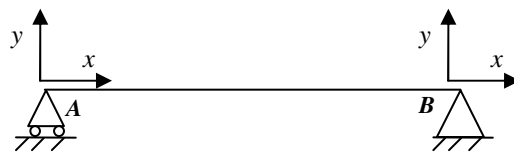
### 1) Calcul des réactions d'appuis

Les réactions d'appuis ont déjà été calculées dans le chapitre « *La statique* ». Nous rappelons ci-dessous les résultats obtenus :

$$F_{xB} = 0t \quad \text{et} \quad F_{yA} = F_{yB} = \frac{ql}{2} = 12t.$$

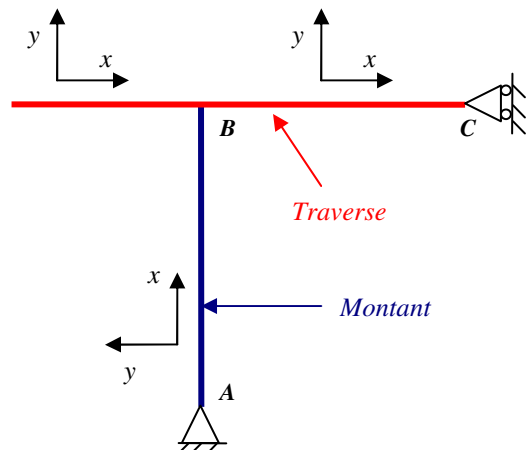
### 2) Définition des repères locaux

Pour cette poutre les repères locaux sont présentés sur la figure ci-contre :



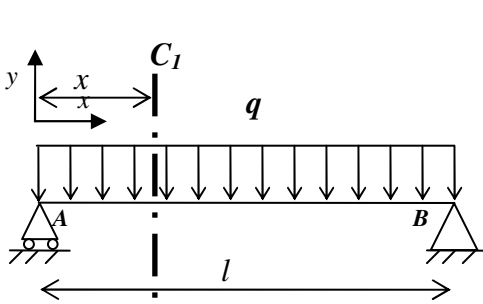
Remarque : dans le cas d'un portique, l'axe des abscisses  $x$  correspond à la fibre moyenne de l'élément (montant ou traverse).

Un portique est un système constitué de montant(s) et de traverse (s).

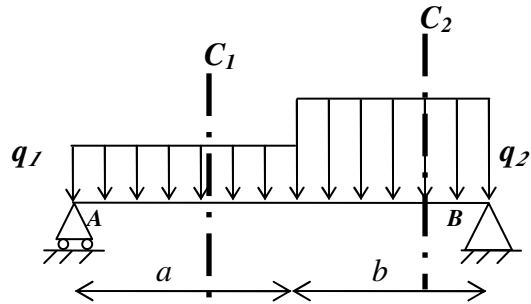


### 3) Effectuer des coupures

Les expressions des sollicitations ( $M$ ,  $V$  et  $N$ ) dépendent du chargement et des conditions d'appuis. Dès que ces expressions changent, il faut effectuer une découpe supplémentaire. Deux cas sont illustrés ci-dessous :



Une seule coupure  $C_1$  suffit



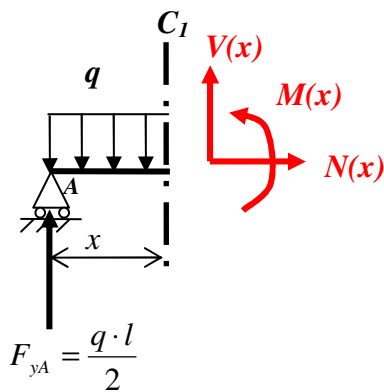
Deux coupures  $C_1$  et  $C_2$  sont nécessaires

### 4) Tracer les diagrammes de $M$ , $V$ et $N$

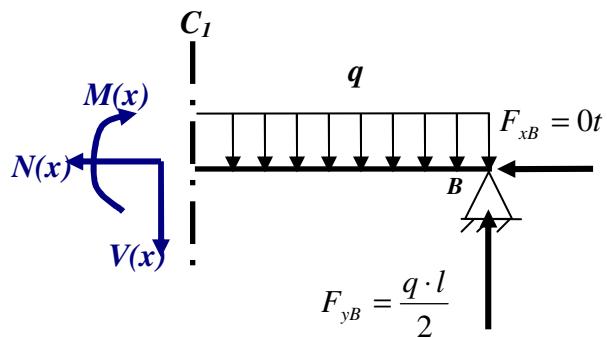
Afin de tracer les diagrammes du moment fléchissant  $M$ , de l'effort tranchant  $V$  et de l'effort normal  $N$ , il faut établir leurs expressions et ce pour chaque coupe.

Reprenons l'exemple de la poutre isostatique soumise à une charge uniforme  $q$ .

En effectuant la coupure  $C_1$ , la poutre est séparée en deux parties (droite et gauche). La détermination des sollicitations s'effectue en exprimant l'équilibre de l'une des deux parties. Il faut noter que les efforts appliqués à droite de la coupure équilibrent les efforts appliqués à gauche de cette même coupure (voir leur sens sur la figure ci-dessous).



Partie gauche



Partie droite

En appliquant le principe fondamental de la statique à la partie gauche de la poutre, on obtient :



$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 & (1) \\ \sum F_y = F_{yA} + V(x) - q \cdot x = 0 & (2) \\ \sum M_{/zA} = M(x) + V(x) \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow N(x) = 0$$

$$(2) \Rightarrow V(x) = q \cdot x - \frac{q \cdot l}{2} = q \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

Donc :

- En A ( $x=0$ ), l'effort tranchant est égal à :  $V(A) = -\frac{q \cdot l}{2} = -12t$  (équilibre la réaction d'appui).

- En B ( $x=l$ ), l'effort tranchant est égal à :  $V(B) = \frac{q \cdot l}{2} = 12t$  (équilibre la réaction d'appui).

$$(3) \Rightarrow M(x) = q \frac{x^2}{2} - V(x) \cdot x = q \frac{x^2}{2} - \left( q \cdot x - \frac{q \cdot l}{2} \right) x = \frac{q \cdot l}{2} x - q \frac{x^2}{2} = q \frac{x}{2} (l - x)$$

Donc, sur appuis en A ( $x=0$ ) et en B ( $x=l$ ) le moment fléchissant est nul :  $M(A) = M(B) = 0t \cdot m$ . Le moment max est obtenu à mi-travée pour  $x = l/2$  :

$$M(l/2) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{q \cdot l^2}{8} = 18t \cdot m$$

Remarque :

Si on applique le principe fondamental de la statique à la partie droite de la poutre, nous retrouvons les mêmes expressions de  $M$ ,  $V$  et  $N$ .

Démonstration :

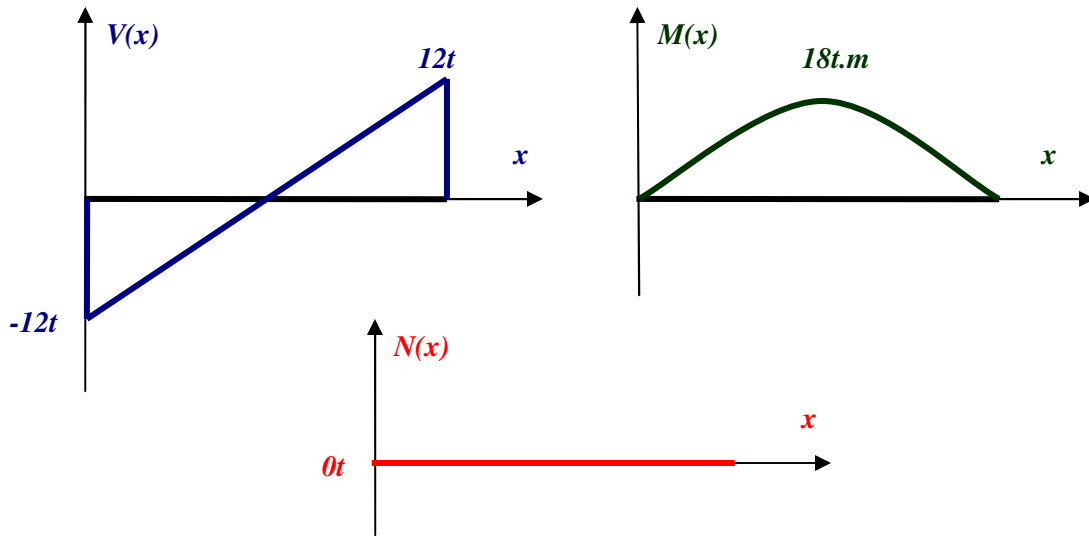
$$\begin{cases} \sum F_x = N(x) = 0 & (1) \\ \sum F_y = V(x) + q(l-x) - F_{yB} = 0 & (2) \\ \sum M_{/zA} = M(x) - V(x) \cdot (l-x) - \frac{q \cdot (l-x)^2}{2} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow N(x) = 0$$

$$(2) \Rightarrow V(x) = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot (l-x) = q \cdot x - \frac{q \cdot l}{2} = q \left( x - \frac{l}{2} \right)$$

$$(3) \Rightarrow M(x) = V(x) \cdot (l-x) + q \frac{(l-x)^2}{2} = q \left( x - \frac{l}{2} \right) (l-x) + q \frac{(l-x)^2}{2} = q(l-x) \left( x - \frac{l}{2} + \frac{l-x}{2} \right) = \frac{q \cdot x}{2} (l-x)$$

A partir des expressions de  $M(x)$ ,  $V(x)$  et  $N(x)$ , il est possible de tracer leurs variations.



Remarque :

L'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à  $x$  :  $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$ . La

relation entre l'effort tranchant et la charge est :  $q_y = -\frac{dV(x)}{dx}$ .

## Types de sollicitations simples

A titre indicatif, on présente ci-après quelques types de sollicitations (les plus courantes).

### *Traction ou compression simple*

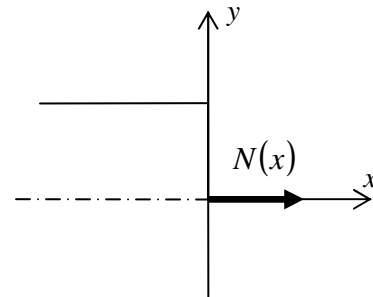
Si les sollicitations appliquées sur une section se résument en :

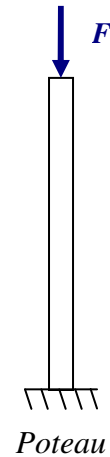
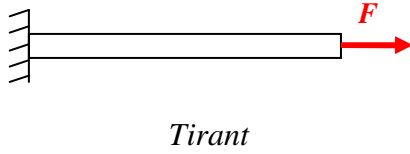
$$\begin{cases} N(x) \neq 0 \\ V(x) = 0 \\ M_f(x) = 0 \end{cases},$$

on dit qu'elle soumise à la traction ou à la compression simple.

Exemples :

- Un tirant : élément sollicité en traction simple.
- Un poteau : élément encastré soumis à un effort de compression.



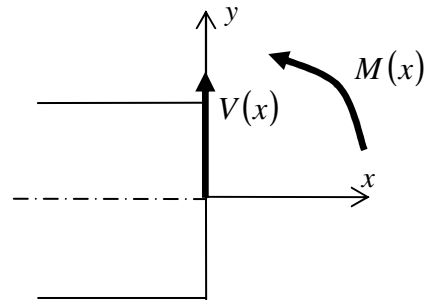


### *Flexion simple*

Si les sollicitations appliquées sur une section se résument en :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) \neq 0 \text{ ou } V(x) = 0, \\ M_f(x) \neq 0 \end{cases}$$

on dit qu'elle est soumise à la flexion simple. Lorsque l'effort tranchant est nul (moment fléchissant constant), la section est soumise à la flexion pure.

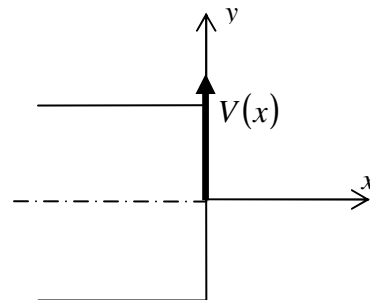


### *Cisaillement pur*

Si les sollicitations appliquées sur une section se résument en :

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) \neq 0, \\ M_f(x) = 0 \end{cases}$$

on dit qu'elle est soumise au cisaillement pur.



## **CAS DES SYSTEMES PLANS EN TREILLIS ARTICULES**

Un système en treillis articulé est un système composé de barres reliées entre elles par des articulations. On appelle *nœud* les articulations communes à plusieurs barres. Lorsque les axes des barres et les charges appliquées sont situés dans le même plan, on parle de système plan.

Nous distinguons :

- Les systèmes chargés indirectement : toutes les forces extérieures sont appliquées aux nœuds.
- Les systèmes chargés directement : les forces sont appliquées aux nœuds ou sur les barres.

On s'intéresse dans ce cours aux systèmes en treillis chargés indirectement. Dans ce cas, les barres sont sollicitées par des efforts normaux (traction ou compressions) transmis par les nœuds.

Nous avons défini précédemment les systèmes isostatiques et les systèmes hyperstatiques. Dans le cas des systèmes en treillis, le degré d'hyperstaticité  $H$  est donné par :

$$H = (b + l) - 2n$$

Avec :

$b$  : le nombre de barres.

$l$  : le nombre de liaisons dans les appuis.

$n$  : le nombre de nœuds.

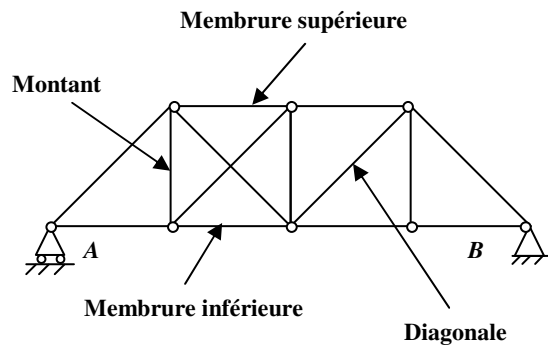
### Exemple :

Pour le système représenté ci-contre :

$$b = 14$$

$$n = 8$$

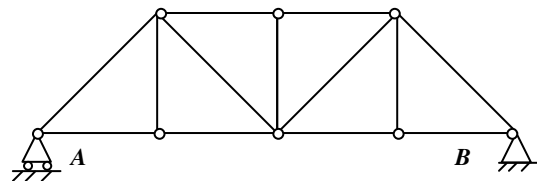
$$l = 3 \text{ (2 pour l'appui double et 1 pour l'appui simple)}$$



$$H = (b + l) - 2n = (14 + 3) - 2 \times 8 = 1.$$

Pour que ce système soit isostatique, il faut respecter la condition suivante :

$$(b + l) - 2n = 0 \Rightarrow b = 2n - 3.$$

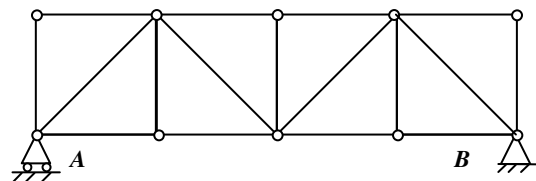


Pour 8 nœuds, il faut 13 barres (voir figure ci-contre).

Remarque :

On peut rendre un système en treillis isostatique, en modifiant le nombre de nœuds ou de barres voir la proposition ci-contre pour le même système.

$$b = 2n - 3 = 2 \times 10 - 3 = 17.$$



## Méthode des nœuds

Il existe plusieurs méthodes permettant de calculer les efforts dans les barres :

- Méthodes graphiques (tracé de Crémone)
- Méthodes analytiques (méthodes des nœuds, méthodes des sections)

On résume dans cette partie la méthode appelée « méthode des nœuds ». Nous signalons que quelque soit le type de méthode utilisée, il faut procéder en premier au calcul des réactions d'appuis.

Le principe de cette méthode consiste à isoler un nœud par des coupures, libérant des efforts dans les barres et à projeter tout les efforts (efforts normaux et forces extérieures) agissant sur le nœud suivant deux axes perpendiculaires. On commencera obligatoirement par un nœud qui ne comporte que deux barres (2 équations pour deux inconnues). Puis on se déplace à un nœud adjacent.

## DEVOIR

Pour l'ensemble des exercices :

- Vérifier si le système est isostatique
- Pour les systèmes isostatiques :
  - o Calculer les réactions d'appuis
  - o Tracer les diagrammes du moment fléchissant  $M$ , de l'effort tranchant  $V$  et de l'effort normal  $N$ .

### Exercice 1 :

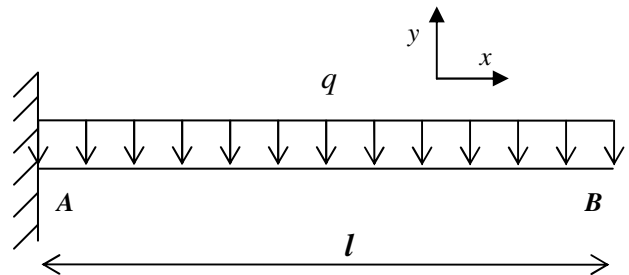
Poutre console (encastrée en A) de portée  $l$ .

Le chargement :

Une charge répartie  $q$  sur une longueur  $l$

Application numérique :

$$\begin{cases} l = 6m \\ q = 4t/m \end{cases}$$



### Exercice 2 :

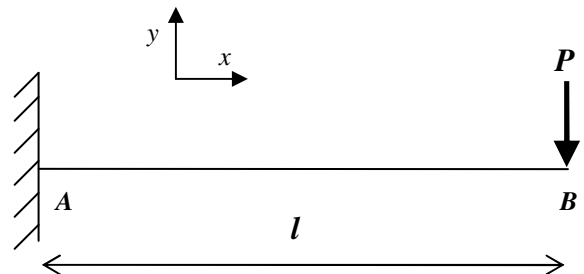
Poutre console (encastrée en A) de portée  $l$ .

Le chargement :

Une charge concentrée  $P$  en B.

Application numérique :

$$\begin{cases} l = 6m \\ P = 5t \end{cases}$$



Comparer ces résultats avec ceux obtenus en exercice 1.

### Exercice 3 :

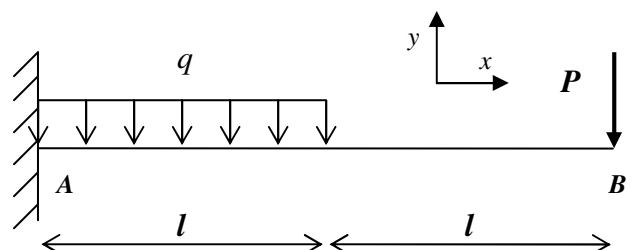
Poutre console (encastrée en A) de portée  $2l$ .

Le chargement :

- Une charge répartie  $q$  sur une longueur  $l$
- Une charge concentrée  $P$  en B

Application numérique :

$$\begin{cases} l = 4m \\ q = 3t/m \\ P = 6t \end{cases}$$



### Exercice 4 :

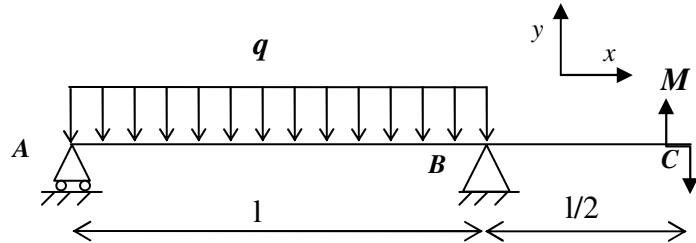
Poutre console libre en C.

Le chargement :

- Une charge répartie  $q$  sur une longueur  $l$
- Un couple  $M$  en C

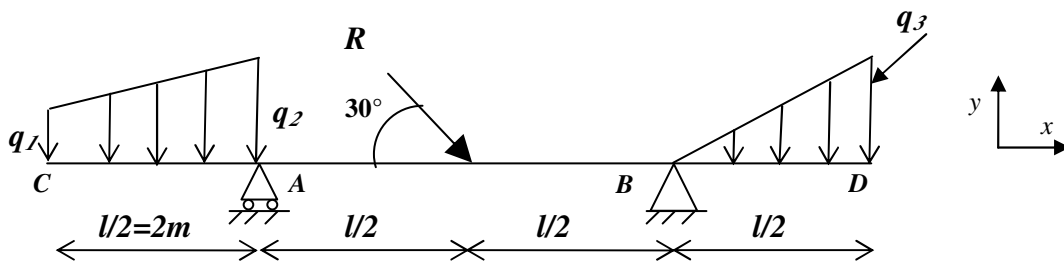
Application numérique :

$$\begin{cases} l = 6m \\ q = 2t/m \\ M = 6t.m \end{cases}$$



### Exercice 5 :

Poutre console libre en C et D.



Le chargement :

- Des charges réparties de formes différentes :  $q_2 = q_3 = 4t/m$  et  $q_1 = 2t/m$ .
- Une charge concentrée (inclinée de  $30^\circ$ ) :  $R = 8t$ .

### Exercice 6 :

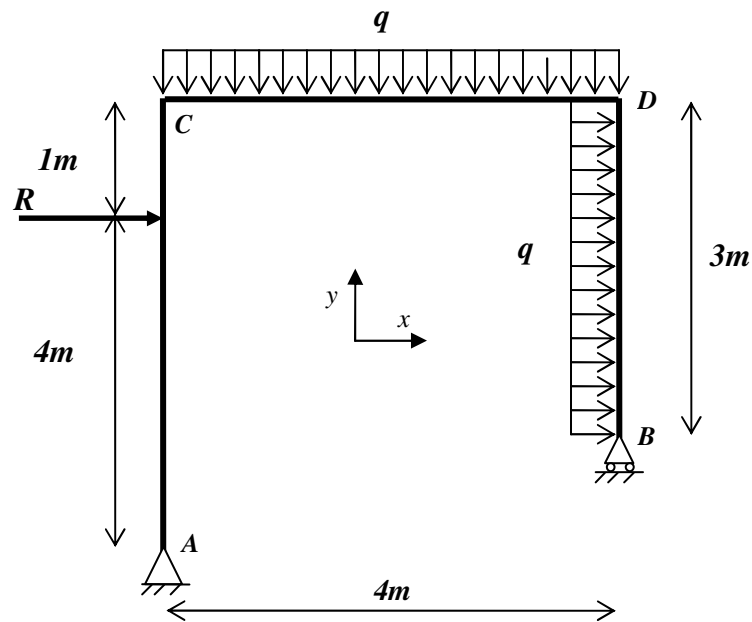
Un portique constitué de deux montants AC et BD et d'une traverse CD.

Les appuis :

- Un appui simple en B.
- Un appui double en A.

Le chargement :

- Une charge concentrée sur AC :  $R = 10t$  appliquée à une distance de  $4m$  de A.
- Deux charges réparties de même intensité ( $q = 2t/m$ ) appliquées sur CD et BD.



### Exercice 7 :

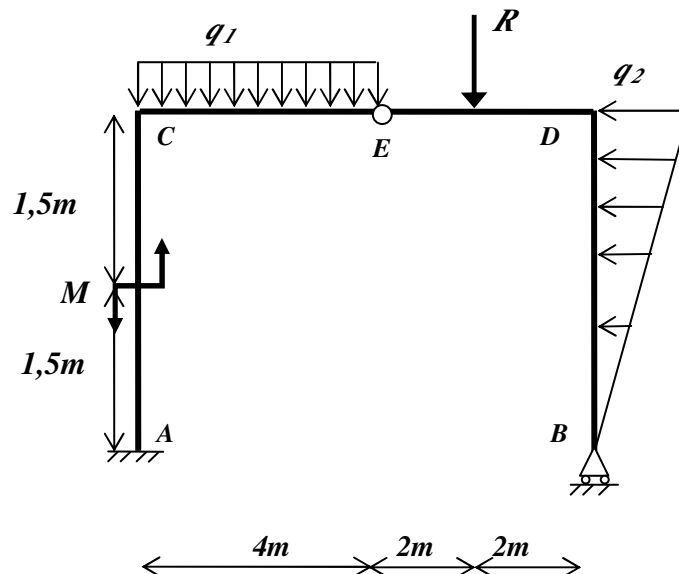
Un portique constitué de deux montants  $AC$  et  $BD$  et de deux traverses  $CE$  et  $ED$  reliées par une articulation.

Les appuis :

- Un encastrement en  $A$ .
- Un appui simple en  $B$ .
- Une articulation en  $E$ .

Le chargement :

- Un couple  $M = 4t.m$ .
- Une charge concentrée sur  $ED$  :  $R = 8t$  appliquée à une distance de  $2m$  de  $E$ .
- Une charges répartie sur  $CE$  ( $q_1 = 2t/m$ ).
- Une charges triangulaire sur  $BD$  ( $q_2 = 3t/m$ ).





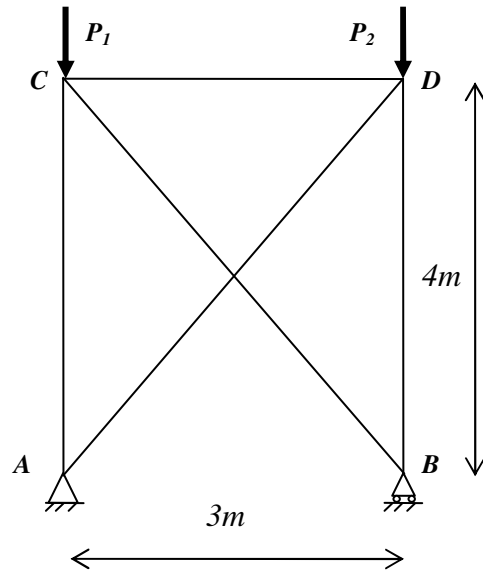
### Exercice 8 :

Treillis.

Le chargement :

Deux charges concentrées :

$$\begin{cases} P_1 = 50kN \\ P_2 = 80kN \end{cases}$$



### Exercice 9 :

Poutre à treillis.

Le chargement :

Deux charges concentrées :

$$\begin{cases} P_1 = 5t \\ P_2 = 10t \end{cases}$$

Pour l'application numérique, on prend  $a = 3m$ .

